

## **TỔNG QUAN NGHIÊN CỨU VỀ TRÍ TƯỞNG TƯỢNG KHÔNG GIAN TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

**Đậu Anh Tuấn**

*Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An*

Ngày nhận bài 29/6/2020, ngày nhận đăng 16/8/2020

**Tóm tắt:** Bài viết nghiên cứu tổng quan về các công trình của các nhà giáo dục toán, liên quan tới việc bồi dưỡng trí tưởng tượng không gian cho học sinh trong dạy học toán nói chung, dạy học hình học nói riêng. Việc nghiên cứu này nhằm hướng đến sự hiểu biết về các quan niệm của các tác giả trên thế giới và trong nước về các thành tố cấu thành của trí tưởng tượng không gian, các hoạt động cần bồi dưỡng cho học sinh khi dạy học hình học ở trường trung học phổ thông để hình thành, phát triển trí tưởng tượng không gian và tìm hiểu vai trò của việc bồi dưỡng trí tưởng tượng không gian trong giáo dục toán học.

**Từ khóa:** Tổng quan nghiên cứu; trí tưởng tượng không gian; hình học; trung học phổ thông.

### **1. Đặt vấn đề**

Các nhà giáo dục toán học trên thế giới và trong nước đã nhìn nhận vai trò của trí tưởng tượng không gian (TTTKG) trong giáo dục toán học ở trường phổ thông theo những bình diện khác nhau. Viện sỹ A. D. Alekxandrov xem TTTKG là một trong ba thành phần then chốt của hoạt động dạy học hình học ở trường phổ thông. TTTKG gợi ý cho logic của các bước suy luận hình thức (Lê Thị Hoài Châu, 2015).

Viện sỹ A. H. Kônômôgôrôp xem TTTKG - trực giác toán học là thành phần quan trọng hàng đầu của năng lực toán học (Phạm Văn Hoàn (chủ biên), Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình, 1981, tr. 128).

Các nghiên cứu trong nước như Lê Thị Hoài Châu (2015), Bùi Văn Nghị (2008), Đào Tam (2005), Nguyễn Văn Thiêm (1984)... đã phân tích vai trò của TTTKG trong dạy học hình học và trong hoạt động kết nối toán học với thực tiễn.

Trong Chương trình môn Toán 2018, một trong những mục tiêu của mạch Hình học và Đo lường từ cấp tiểu học đến cấp trung học phổ thông là *phát triển trí tưởng tượng không gian* (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018).

Như vậy, nghiên cứu hình thành và phát triển TTTKG cho học sinh trong dạy học hình học hiện nay nhằm góp phần đáp ứng mục tiêu của Chương trình môn Toán 2018 là cần thiết. Việc nghiên cứu này cần được quan tâm đến tính kế thừa và phát triển các thành quả nghiên cứu của các nhà giáo dục toán học trên thế giới và trong nước trong những năm gần đây.

Vì những lí do trên, trong bài báo này chúng tôi quan tâm nghiên cứu, phân tích, tổng hợp, khái quát những vấn đề liên quan đến hình thành và phát triển TTTKG, từ đó định hướng cho các nghiên cứu tiếp theo về phát triển TTTKG.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Tình hình nghiên cứu ngoài nước

Qua nghiên cứu các tài liệu của các tác giả nước ngoài có thể thấy các kết quả đã tập trung vào các khía cạnh sau đây của TTTKG: *Vai trò của TTTKG, quan niệm về TTTKG và các biểu hiện của nó, vấn đề phát triển TTTKG nói chung và trong hình học nói riêng.*

Thứ nhất, về vai trò của TTTKG, H. Gardner (2016) nghiên cứu về cơ cấu trí khôn của con người, trong đó trí khôn không gian chiếm một vị trí quan trọng. Theo đó, năng lực tri giác không gian, TTTKG và tư duy hình học tích cực độc lập được coi là các bộ phận của trí khôn không gian.

V. A. Korutexski cho rằng: “Sự tồn tại của các loại hình toán học trong nhà trường liên quan đến vai trò tương đối của các thành phần của lôgic và trực quan - hình tượng trong hoạt động trí tuệ của học sinh. Trong các thực nghiệm, tác giả nhận thấy có một sự tương quan rõ rệt giữa năng lực biểu diễn trực quan các mối quan hệ của toán học trừu tượng với năng lực tưởng tượng không gian hình học” (V. A. Korutexski, 1973).

Một trong những vai trò tổng quát của hình học trong toán học là nó gắn với tư duy tổng hợp chính xác, xuất phát từ những biểu tượng không gian; tư duy tổng hợp này thường giúp bao quát được toàn cục. Như vậy, hình học được đặc trưng không chỉ bởi đối tượng của nó mà còn bởi cả phương pháp, xuất phát từ những biểu tượng trực quan (Hoàng Chúng, 2000).

Trong chương trình giáo dục của Úc, quá trình học tập nhằm phát triển năng lực tính toán (numeracy) được tổ chức theo 6 thành tố có liên quan lẫn nhau là: Ước tính và tính toán với số nguyên; Nhận diện và sử dụng các mô hình và mối quan hệ; Sử dụng phân số, số thập phân, tỉ lệ phần trăm, tỉ số và tỉ lệ; Phát huy TTTKG; Diễn giải thông tin thống kê; Đo lường. Trong đó, học sinh cần hình dung các hình hai chiều và ba chiều; giải thích bản đồ và sơ đồ (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2014).

Theo A. H. Kônômôgôrôp, trong thành phần của những năng lực toán học có TTTKG hay là “trực giác hình học” (Phạm Văn Hoàn (chủ biên), Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình, 1981).

M. Iu. Koliagin (1980) nhận định rằng: Ngày nay việc phát triển tư duy trực giác - trí tưởng tượng hình học được nhiều nhà giáo dục toán học tiến bộ quan tâm. Để nhấn mạnh tư tưởng trên tác giả đã trích lời của A. H. Kônômôgôrôp: “Trí tưởng tượng hình học hay là như người ta đã nói “trực giác hình học” đóng vai trò hết sức quan trọng khi nghiên cứu tất cả các lĩnh vực của toán học, thậm chí cả những lĩnh vực trừu tượng nhất. Ở trường phổ thông, việc đưa ra các biểu tượng trực quan của các hình không gian thường là khó khăn đặc biệt đối với học sinh. Một người học toán tốt (ở mức độ so sánh với một học sinh bình thường) cần phải hình dung được thiết diện của một hình lập phương tạo bởi mặt phẳng đi qua tâm và vuông góc với một đường chéo khi người đó nhắm mắt lại không sử dụng hình vẽ”.

Thứ hai, về khái niệm TTTKG và các biểu hiện của TTTKG. Một trong những yếu tố liên quan đến TTTKG là hình và hình vẽ. Đối tượng nghiên cứu của hình học là các hình hình học (gọi tắt là hình). Chúng được mô tả qua những tiên đề, định nghĩa, tính chất. Còn hình vẽ là hình biểu diễn phẳng của các hình hình học. Quan điểm này được nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới thừa nhận. Chẳng hạn, Arsac nói rõ: Hình vẽ được tạo

trên giấy (hay trên cát như trước đây Ác-si-mét đã làm) gồm những nét cụ thể, còn hình là đối tượng toán học mà hình vẽ chỉ là một hình biểu diễn của nó. Theo ông, hình là yếu tố của “thế giới toán học”, còn hình vẽ thuộc về thế giới cảm tính (Lê Thị Hoài Châu, 2015).

Tán thành quan niệm của Arsac nhưng Laborde và Caponi còn tính đến yếu tố có trước hình, đó là đối tượng của không gian mà họ gọi là đối tượng tham chiếu. Hình là một sự mô hình hóa của đối tượng tham chiếu này. Hình vẽ là một thực thể vật chất, được xem như cái biểu đạt, còn hình là cái được biểu đạt (Lê Thị Hoài Châu, 2015).

Theo tư tưởng của Laborde và Caponi, Chachoua đặt hình vẽ vào tam giác “đối tượng vật lí - đối tượng hình học - hình vẽ”, trong đó cực thứ ba là một biểu diễn cho một đối tượng vật lí hoặc đối tượng hình học (Lê Thị Hoài Châu, 2015).

Ba chức năng cơ bản của hình vẽ trong dạy học hình học đã được Parzysz, một nhà nghiên cứu lí luận dạy học người Pháp, đề cập. Đó là *tóm tắt*, *chứng tỏ* và *phỏng đoán* (Lê Thị Hoài Châu, 2015). Theo Parzysz, chức năng tóm tắt đặc trưng bởi: Hình vẽ là sự thể hiện bằng ngôn ngữ hình ảnh những gì được nói đến trong đề bài toán cần giải; chức năng chứng tỏ: Hình vẽ có thể cung cấp những phản ví dụ cho phép bác bỏ một mệnh đề nào đó; chức năng phỏng đoán: Hình vẽ đúng, trực quan còn có tác dụng giúp phát hiện tính chất của hình, hình thành những phỏng đoán hoặc tìm phương hướng giải quyết bài toán.

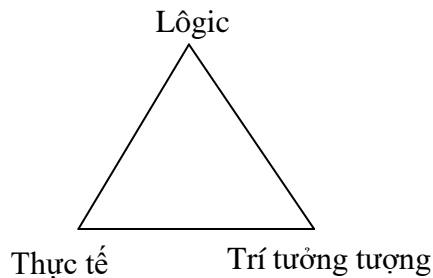
Trong việc dạy học hình học, theo Van Hiele, việc tiếp thu của học sinh trải qua 5 cấp độ là Hình dung - Phân tích - Suy diễn không hình thức - Suy diễn - Chặt chẽ. Có thể nói 4 cấp độ đầu phù hợp với học sinh trung học phổ thông (Phạm Gia Đức, Phạm Đức Quang, 2002, tr. 27-28). Chúng ta có thể xem *hình dung* và *suy diễn không hình thức* là các biểu hiện của TTTKG.

Trong PISA 2018, *không gian* và *hình dạng* là một trong bốn nội dung toán học được sử dụng làm đối tượng đánh giá. Hình học có vai trò là môn học cốt lõi trang bị cho học sinh về không gian và hình dạng. Tuy nhiên, phạm trù không gian và hình dạng đã vượt ra khỏi khuôn khổ của hình học truyền thống về mặt nội dung, ý nghĩa và phương pháp, trong đó *hình dung* về không gian là một trong các thành phần nằm ngoài khuôn khổ đó. W. Susilawati, D. Suriady, J. A. Dahlan (2017) đã chỉ ra các biểu hiện của khả năng hình dung về không gian và đề xuất đưa khả năng hình dung về không gian vào dạy học hình học ở trên lớp.

L. L. Thurstone coi năng lực không gian là một trong bảy nhân tố hàng đầu của trí tuệ. Ông đã chia khả năng liên quan đến không gian gồm ba thành phần: năng lực nhận biết đặc điểm đồ vật khi nó được nhìn dưới các góc độ khác nhau; năng lực hình dung sự vận động hoặc sự rời chỗ của các bộ phận bên trong của một hình dạng; năng lực tưởng tượng về các mối quan hệ không gian trong đó bộ phận căn bản của bài toán là hướng xoay của cơ thể người quan sát (Howard Gardner, 2016, tr. 265).

Thứ ba, về những yếu tố ảnh hưởng tới TTTKG và vấn đề phát triển TTTKG trong dạy học toán nói chung, dạy học hình học nói riêng. M. A. Đanilop & M. N. Skatkin (1980) đã chỉ rõ: “Sự tìm hiểu những vật thể và hiện tượng, việc phát hiện ra những mối liên hệ giữa chúng với nhau và sự hình thành những biểu tượng và khái niệm khoa học cũng là quá trình phát triển khả năng quan sát, trí tưởng tượng và tư duy lôgic của học sinh”.

A. D. Alecxandrov trong bài báo bàn về hình học đã đưa ra sơ đồ tam giác đặc trưng cho việc dạy hình học ở trường phổ thông có ba đỉnh: lôgic, trí tưởng tượng, thực tế. Sơ đồ này làm sáng tỏ được: hình học là sự thống nhất giữa trí tưởng tượng sinh động với lôgic chặt chẽ. Trí tưởng tượng cho ta cái nhìn trực tiếp các sự kiện hình học và gợi ý cho lôgic diễn đạt, lôgic chứng minh các sự kiện hình học đó. Lôgic, đến lượt mình lại đảm bảo cho trí tưởng tượng chính xác và định hướng tới việc thiết lập nên bức tranh phản ánh đến mỗi liên hệ lôgic. Mặt khác thực tế là nguồn gốc của toán học nói chung, hình học nói riêng. Các khái niệm và các tính chất hình học dù trừu tượng ở mức độ cao vẫn tìm thấy các ứng dụng của nó trong thực tế (Lê Thị Hoài Châu, 2015).



## 2.2. Tình hình nghiên cứu trong nước

Ở Việt Nam cho đến nay đã có một số nghiên cứu liên quan đến TTTKG.

Thứ nhất, về khái niệm, vai trò và các biểu hiện của TTTKG.

Nguyễn Mạnh Tuấn (2010) đã đưa ra khái niệm về TTTKG và việc phát triển TTTKG cho học sinh những năm đầu tiểu học (lớp 1, 2) bằng phần mềm giáo dục. Việc sử dụng phần mềm giáo dục là cần thiết để hỗ trợ học sinh phát triển TTTKG.

Lê Thị Hoài Châu (2015) đã làm sáng tỏ một số hoạt động thành phần của TTTKG như: Hoạt động định hướng để di chuyển từ vị trí này đến vị trí khác trong một thành phố không quen biết hay là di chuyển trên biển phải sử dụng bản đồ. Người thực hiện hoạt động này cần phải tạo ra hoặc sử dụng một sơ đồ để xác định vị trí cần đến và dự kiến hành trình; hoạt động biểu diễn sự dịch chuyển của một vật đối với những đối tượng xung quanh nó; xác định hướng của không gian, biểu diễn những cái mình nhìn thấy, mô tả các khối quen thuộc trong cuộc sống hàng ngày... Nhưng những kiến thức cần thiết về không gian không phải bao giờ cũng được xây dựng hoàn chỉnh chỉ thông qua hoạt động thực tiễn của mỗi người. Đằng sau các kiến thức quen thuộc được tích lũy từ cuộc sống còn có những kiến thức hình học thuần túy. Cụ thể là việc nghiên cứu tính đối xứng của các yếu tố, quan hệ giữa các thành phần của hình, những phép quay bảo toàn nó, rồi việc dựng các thiết diện, việc xem xét các hình chiếu của một hình sẽ cho phép biểu diễn nó dưới nhiều dạng khác nhau và từ đó hiểu nó đầy đủ hơn.

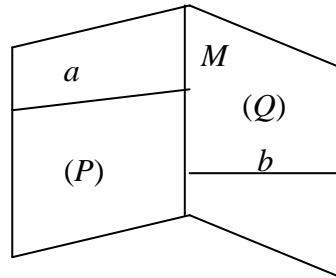
Vũ Thị Thái (2001) đề xuất một định nghĩa về trí tưởng tượng trong không gian, đó là: *Trí tưởng tượng không gian* là hoạt động trí óc thể hiện quá trình biến đổi những biểu tượng không gian đã có nhằm kiến tạo những biểu tượng không gian mới. Chúng ta có thể hiểu trí tưởng tượng không gian gồm hai yếu tố là *trí tưởng tượng* với tư cách là một quá trình nhận thức và *đối tượng* của trí tưởng tượng là không gian.

Thứ hai, về những yếu tố ảnh hưởng tới TTTKG và vấn đề phát triển TTTKG trong dạy học toán nói chung, dạy học hình học nói riêng.

Nguyễn Văn Thiêm (1984) đã phân tích các đặc điểm, cấu trúc, sự hình thành và phát triển của tưởng tượng không gian đồng thời đề xuất ba mức độ về sự hình thành biểu tượng không gian và TTTKG ở học sinh tiểu học: Phân biệt, nhận biết; tái hiện trong óc; có những yếu tố của sự tổng hợp những biểu tượng không gian.

Theo Đào Tam (2005), trong dạy học hình học ở trường THPT, để phát triển cho học sinh các biểu tượng không gian đúng đắn, từ đó làm cơ sở cho việc phát triển trí tưởng tượng không gian, cần tạo cơ hội cho học sinh hình dung các hình không gian, các quan hệ giữa các yếu tố của hình không gian từ hình biểu diễn và ngược lại; ở mức độ cao đối với học sinh khá giỏi biết hình dung các hình không gian qua các yếu tố đã cho trong bài toán.

Cũng theo Đào Tam (2005), nếu TTTKG của học sinh còn yếu thì việc giải quyết các vấn đề hình học không gian thường dẫn đến sai lầm do ngộ nhận trực quan. Chẳng hạn xét bài toán: Cho hai đường thẳng  $a, b$  chéo nhau và một điểm  $M$ . Dựng đường thẳng  $d$  qua  $M$  cắt hai đường thẳng  $a, b$ . Khi giải bài toán này, học sinh chỉ xét một vị trí nào đó của điểm  $M$  đối với hai đường thẳng chéo nhau  $a, b$  và tìm đường thẳng  $d$  cần dựng là giao của hai mặt phẳng  $(P)$  qua  $a, M$  và  $(Q)$  đi qua  $b, M$ . Nhiều học sinh cho rằng bài toán luôn có nghiệm, do không biết phân hoạch các trường hợp có thể xảy ra của điểm  $M$ . Chúng ta có thể kiểm tra trong trường hợp điểm  $M$  thuộc mặt phẳng chứa  $a$  song song với  $b$  hoặc thuộc mặt phẳng chứa  $b$  song song với  $a$  sẽ vô nghiệm - không có đường thẳng  $d$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Về vai trò của Hình học, Bùi Văn Nghị đã nhấn mạnh: Phân môn Hình học rất có điều kiện phát triển TTTKG, rèn luyện lập luận chứng minh phản chứng cho học sinh. Tác giả cho rằng không có trí tưởng tượng thì không có sự sáng tạo nào hết. Nghiên cứu hình học không gian là nghiên cứu trên hình biểu diễn của các hình không gian trên mặt phẳng nên trí tưởng tượng phát triển (Bùi Văn Nghị, 2008).

Vũ Thị Thái (2001) đã so sánh mối quan hệ giữa TTTKG và tư duy không gian, đề xuất các tình huống dẫn đến những biến đổi biểu tượng không gian cho học sinh tiểu học.

Phạm Văn Hoàn (chủ biên), Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981) đã làm sáng tỏ luận điểm: Các mô hình toán đặc biệt là các mô hình hình học không gian rất có tác dụng trong việc hình thành những biểu tượng đúng đắn về các hình khối giúp học sinh phát triển TTTKG một cách vững chắc.

### ***2.3. Phân tích các nghiên cứu tổng quan về trí tưởng tượng không gian trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông***

Thông qua việc phân tích và tổng hợp các nghiên cứu của các nhà giáo dục toán học liên quan đến TTTKG, bước đầu chúng tôi thu được các kết quả sau:

2.3.1. Sáng tỏ được mối liên hệ giữa trí tưởng tượng hình học, TTTKG và trực giác hình học. Nhiều nhà giáo dục toán học đưa ra khái niệm về tư duy trực giác nên chúng tôi nhận thức rằng TTTKG liên hệ trực tiếp với tư duy trực giác.

2.3.2. Nhận thức được mối liên hệ giữa TTTKG, tư duy trực giác với tư duy lôgic và các chứng minh hình thức trong toán học: TTTKG gợi ý cho tư duy lôgic, cách diễn đạt và các chứng minh; ngược lại, nếu có tư duy lôgic tốt thì các giả thuyết đề ra nhờ TTTKG có cơ sở khoa học.

2.3.3. Các nghiên cứu trước đây chưa đưa ra định nghĩa tường minh về khái niệm TTTKG, các thành tố cấu thành TTTKG được thể hiện qua các nghiên cứu theo các bình diện khác nhau. Tuy nhiên có thể kể ra những thành tố tiêu biểu nhất, chúng là những thành tố trong tổ hợp thành tố cấu thành TTTKG:

+ Khả năng hình dung các kết quả về hình dạng, quan hệ, số lượng trong hình học được học ở trường phổ thông.

+ Khả năng hình dung các hình không gian, các mối liên hệ các hình không gian qua hình biểu diễn.

+ Khả năng định hướng không gian, giúp nghiên cứu hình học và vận dụng vào thực tiễn: Những vấn đề liên quan đến vectơ, tọa độ, chiều quay, vị trí cần đến trong thực tế...

Chúng tôi thấy còn một số nội dung liên quan đến TTTKG cần phát triển cho học sinh nhưng chưa được nghiên cứu một cách đầy đủ, sâu sắc, chẳng hạn như các vấn đề sau đây:

- Ước lượng về độ dài, độ lớn, kích thước của các hình hình học và ước lượng trong thực tế.

- Vấn đề về mối liên hệ giữa các hình, phân hoạch một hình thành các hình quen thuộc, trải hình không gian lên mặt phẳng...

Những vấn đề vừa nêu ở trên sẽ được dự tính xem xét khi xây dựng khái niệm về TTTKG.

2.3.4. *Sáng tỏ được một số vai trò của TTTKG trong dạy học hình học và trong thực tiễn.*

Những vấn đề được sáng tỏ ở đây là:

- Giúp học sinh thấy được ý nghĩa của các kiến thức toán học, ý nghĩa của các vấn đề toán học trước khi tiến hành lập luận chứng minh, lí giải các vấn đề, lập luận để giải quyết vấn đề.

- Thông qua phát triển TTTKG giúp học sinh có những hiểu biết trong thực tế, giúp hình dung được cấu tạo của các đồ vật thông qua bản vẽ, thông qua các thiết kế.

- Giúp học sinh tiếp cận phán đoán vấn đề toán học, đề ra các giả thuyết thông qua tưởng tượng không gian.

- Giúp giải quyết vấn đề một cách sáng tạo thông qua tưởng tượng hình dung các sự kiện mới, bài toán mới.

2.3.5. *Hình dung được một số hoạt động thành phần của hoạt động hình thành và phát triển TTTKG, bao gồm:*

- Hoạt động tri giác các mô hình thực tiễn, mô hình hình học để hình thành biểu tượng đúng đắn về các hình, các quan hệ liên thuộc và các quan hệ về lượng trong hình đó để hình thành các biểu tượng không gian đúng đắn. Từ đó có được TTTKG sâu sắc.

- Hoạt động xác định chiều, hướng, xác định vị trí từ điểm này sang điểm khác, từ hình này sang hình khác.

- Hoạt động hình dung các hình, các mối quan hệ, liên hệ trong các hình qua hình biểu diễn; hoạt động xác định hình biểu diễn của một hình. Chẳng hạn yêu cầu học sinh xác định mặt phẳng chiếu và phương chiếu để hình biểu diễn của một tứ diện gần đều là một hình chữ nhật thêm hai đường chéo.

- Hoạt động hình dung thiết diện của một hình không gian tạo bởi một mặt phẳng nào đó.

- Hoạt động hình dung kết quả giải quyết vấn đề không cần sử dụng hình vẽ chỉ thông qua tưởng tượng.

Qua nghiên cứu tổng quan thấy rằng các tác giả chưa đề cập tới các hoạt động có ý nghĩa hình thành và phát triển TTTKG sau đây:

- Hoạt động trải một hình không gian lên mặt phẳng.

- Hoạt động kiến tạo một hình không gian theo các bộ phận phẳng cho trước.

- Hoạt động dựng hình không gian.

- Hoạt động ước lượng độ dài, diện tích, thể tích gắn với các hình trong thực tiễn.

### **3. Kết luận**

Qua phân trình bày trên, chúng tôi quan tâm các tư tưởng chủ yếu thể hiện cách tiếp cận nền tảng lí luận của TTTKG như sau: Tìm tòi các thành tố đặc trưng cấu thành TTTKG qua nghiên cứu tổng quan về các công trình của các tác giả trong nước và ngoài nước; nghiên cứu các định nghĩa về TTTKG có thể sử dụng trong giáo dục toán học và khai thác tính kế thừa về định nghĩa TTTKG. Do các định nghĩa này nặng về đặc trưng tâm lí nên chúng tôi đã quan tâm tìm tòi các thành tố then chốt, mang tính đặc trưng của khái niệm TTTKG, đó là cơ sở để tiếp tục nghiên cứu đề xuất các biện pháp phát triển năng lực TTTKG trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông. Qua đó, góp phần đổi mới giáo dục toán học trong giai đoạn hiện nay, đặc biệt góp phần phát triển năng lực tư duy và suy luận, năng lực giải quyết vấn đề trong nội bộ môn toán cũng như trong thực tiễn.

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

Bộ Giáo dục và Đào tạo (2014). *Tài liệu hội thảo Xây dựng Chương trình Giáo dục phổ thông theo định hướng phát triển năng lực học sinh*. Nghệ An.

Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)*. Hà Nội.

Lê Thị Hoài Châu (2015). *Dạy học hình học ở trường phổ thông*. NXB Giáo dục Việt Nam.

Hoàng Chúng (2000). *Phương pháp dạy học hình học ở trường THCS*. NXB Giáo dục.

M. A. Đanilop, M. N. Skatkin (1980). *Lý luận dạy học ở trường học*. NXB Hà Nội.

- Phạm Gia Đức, Phạm Đức Quang (2002). *Hoạt động hình học ở trường THCS*. NXB Giáo dục.
- Howard Gardner (2016). *Cơ cấu trí khôn* (Phạm Toàn dịch). NXB Tri thức.
- Phạm Văn Hoàn (chủ biên), Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981). *Giáo dục học môn Toán*. Hà Nội: NXB Giáo dục.
- M. Iu. Koliagin (1980). *Phương pháp dạy học Toán ở trường phổ thông*. NXB Giáo dục Matxcova.
- V. A. Korutexki (1973). *Tâm lý năng lực toán học của học sinh*. NXB Giáo dục.
- Bùi Văn Nghị (2008). *Giáo trình phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán*. Hà Nội: NXB Đại học Sư phạm.
- Nikolxki (1999). *Từ điển bách khoa phổ thông toán học*. NXB Giáo dục, Tập 1.
- OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>.
- W. Susilawati, D. Suriady, J. A. Dahlan (2017). The improvement of mathematical spatial visualization ability of student through cognitive conflict. *Mathematics Education*, 2017, Vol. 12, No. 2, pp. 155-166.
- Đào Tam (2005). *Phương pháp dạy học hình học ở trường trung học phổ thông*. Hà Nội: NXB Đại học Sư phạm.
- Vũ Thị Thái (2001). *Bước đầu hình thành và phát triển trí tưởng tượng không gian cho học sinh tiểu học thông qua dạy học các yếu tố hình học*. Luận án Tiến sỹ Giáo dục học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- Nguyễn Văn Thiêm (1984). Tưởng tượng không gian, phát huy trí tưởng tượng không gian của học sinh khi dạy hình học phẳng, *Tạp chí Nghiên cứu Giáo dục*, số 11, tháng 12/1984.
- Nguyễn Mạnh Tuấn (2010), Trí tưởng tượng không gian và việc phát triển trí tưởng tượng không gian cho học sinh những năm đầu tiểu học (lớp 1, 2) bằng phần mềm giáo dục. *Tạp chí Giáo dục*, số 248, (kì 2 - 10/2020).
- Nguyễn Thị Xuân (2012). Phát triển năng lực tư duy và trí tưởng tượng không gian của học sinh tiểu học qua bài học toán về cắt - ghép hình. *Tạp chí Giáo dục*, số 289, (kì 1-7/2012), tr. 42-44.



## **SUMMARY**

### **A RESEARCH OVERVIEW ON SPATIAL IMAGINATION IN TEACHING GEOMETRY AT HIGH SCHOOLS**

The article presents a research overview of the works of mathematics educators, related to fostering spatial imagination for students in teaching mathematics in general, teaching geometry in particular. This research aims at conceptions understanding of the authors in the world and in Vietnam about the constituents of spatial imagination and activities that need to be fostered for students when teaching geometry at high schools to form and develop spatial imagination, and it also targets to study the role of fostering spatial imagination in mathematics education.

**Keywords:** Research overview; spatial imagination; geometry; high school.